

СОВРЕМЕННЫЕ ПОДХОДЫ К ИССЛЕДОВАНИЮ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ МНОГОЧЛЕНОВ НА КОРОТКИХ ИНТЕРВАЛАХ

С.Н. Неъматзода, Н.Н. Назрублов

Институт математики имени академика А. Джураева Национальной академии наук Таджикистана

В данной работе рассматриваются этапы исследования распределения дробных частей значений многочленов, аргументы которых принимают значения из коротких интервалов. Основное внимание уделяется методам аналитической теории чисел, связанным с оценками тригонометрических сумм, начиная с классических результатов Гаусса и Вейля и заканчивая современными исследованиями. Показано, что ключевым инструментом исследования распределения дробных частей значений различных многочленов, аргументы которых принимают значения из коротких интервалов, является метод тригонометрических сумм, позволяющий получать нетривиальные оценки и устанавливать равномерное распределение последовательностей по модулю единицы. Рассмотрены оценки рациональных и иррациональных тригонометрических сумм, включая результаты Морделла, Вейля, Хуа Ло-кэна и Виноградова. Особое внимание уделено коротким тригонометрическим суммам Вейля и их роли в исследовании поведения многочленов на коротких интервалах. Приведены результаты таджикских ученых, в частности работы З.Х. Рахмонова, Н.Б. Озодбековой, С.Н. Исмадова, Ф.З. Рахмонова, посвященные оценкам коротких сумм и их применению к задачам равномерного распределения. Полученные результаты демонстрируют значительный прогресс в развитии методов аналитической теории чисел и их применении к задачам распределения. Работа подтверждает важность тригонометрических сумм как универсального инструмента в современной теории чисел.

Ключевые слова: равномерное распределение, дробные части, тригонометрические суммы, суммы Вейля, суммы Гаусса, короткие интервалы, асимптотическая формула, простые числа.

РАВИШҶОИ МУОСИРИ ТАҲҚИҚИ ТАҚСИМШАВИИ ҚИМАТҶОИ БИСЁРАЪЗОГИҶО ДАР ФОСИЛАҶОИ КҶТОҲ

С.Н. Неъматзода, Н.Н. Назрублов

Институти математикаи ба номи академик А. Ҷӯраеви Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон

Дар ин мақола марҳилаҳои асосии таҳқиқоти тақсимшавии қисмҳои касри қиматҳои бисёраъзогӣ, ки аргументҳои онҳо аз интервалҳои кӯтоҳ қимат мегиранд, баррасӣ мегарданд. Таҳқиқот ба усулҳои назарияи аналитикии ададҳо, махсусан ба баҳодиҳии суммаҳои тригонометрӣ асос ёфтааст. Нишон дода мешавад, ки суммаҳои тригонометрӣ барои омӯختани тақсимшавии қисмҳои касри қиматҳои бисёраъзогӣ гуногун, ки аргументҳои онҳо аз интервалҳои кӯтоҳ қимат мегиранд, гирифтани баҳоҳои ғайритривиалӣ ва исботи тақсимшавии мунтазам аз рӯи модули як воситаи муҳим мебошанд. Дар қор натиҷаҳои классикии Гаусс, Вейл, Морделл, Хуа Ло-кэн ва Виноградов таҳлил карда мешаванд. Дикқати махсус ба суммаҳои кӯтоҳи Вейл дода шудааст, ки дар омӯзиши рафтори бисёраъзогӣ дар интервалҳои кӯтоҳ нақши муҳим доранд. Натиҷаҳои олимони тоҷик, аз ҷумла қорҳои З.Ҳ. Раҳмонов, Н.Б. Озодбекова, С.Н. Исмадов ва Ф.З. Раҳмонов, ки ба баҳодиҳии ҷунин суммаҳо баҳшида шудаанд, баррасӣ шудаанд. Натиҷаҳои бадастомада аҳамияти усулҳои суммаҳои тригонометрӣ дар назарияи муосири ададҳо тасдиқ мекунам ва саҳми муҳими олимони тоҷикро дар рушди ин соҳа нишон медиҳанд.

Калидвожаҳо: тақсимшавии мунтазам, қисмҳои касрӣ, суммаҳои тригонометрӣ, суммаҳои Вейл, суммаҳои Гаусс, фосилаҳои кӯтоҳ, формулаи асимптотӣ, ададҳои сода.

MODERN APPROACHES TO THE STUDY OF THE DISTRIBUTION OF POLYNOMIAL VALUES OVER SHORT INTERVALS

S.N. Nematzoda, N.N. Nazrublov

Institute of mathematics named after Academician A. Juraev of the National Academy of sciences of Tajikistan

This paper presents the main stages in the study of the distribution of fractional parts of polynomial values whose arguments lie in short intervals. The research is based on methods of analytic number theory, particularly on estimates of trigonometric sums, starting from classical results by Gauss and Weyl and extending to modern developments. It is shown that the key tool for studying the distribution of fractional parts of the values of various polynomials, whose arguments take values from short intervals, is the method of trigonometric sums, which makes it possible to obtain non-trivial estimates and to establish the uniform distribution of sequences modulo one. The paper reviews estimates of rational and irrational trigonometric sums, including contributions by Mordell, Weyl, Hua Loo-Keng, and Vinogradov. Special attention is paid to short Weyl sums and their applications to the study of polynomial values over short intervals. The results of Tajik mathematicians, especially Z.Kh. Rakhmonov, N.B. Ozodbekova, S.N. Ismatov and F.Z. Rakhmonov are discussed, focusing on bounds for short sums and their applications to uniform distribution problems. The obtained results demonstrate substantial progress in analytic number theory and its applications to distribution problems. The study confirms the central role of trigonometric sums as a powerful and versatile tool in modern number theory.

Keywords: uniform distribution, fractional parts, trigonometric sums, Weyl sums, Gauss sums, short intervals, asymptotic formula, prime numbers.

Введение (Introduction)

Одной из фундаментальных задач аналитической теории чисел является изучение закономерностей распределения дробных частей значений многочленов. Её актуальность обусловлена как фундаментальным характером, так и широкими приложениями в теории чисел, гармоническом анализе и смежных областях.

Особый интерес представляет случай, когда аргументы многочленов принимают значения из коротких интервалов, поскольку в этом случае классические методы требуют существенного уточнения. Развитие методов оценки тригонометрических сумм позволило получить значительный прогресс в данном направлении.

Материалы и методы (Materials and methods)

Под тригонометрической суммой понимают конечную сумму вида

$$S = \sum_{\Omega} e(F(x_1, x_2, \dots, x_k)), \quad (1)$$

где $F(x_1, x_2, \dots, x_k)$ – действительная функция k переменных. В равенстве (1) суммирование берется по всем целочисленным точкам $(x_1, x_2, \dots, x_k)$, которые принадлежат некоторой области Ω .

Получение возможно наиболее точных верхних оценок для модуля тригонометрических сумм является одним из ключевых задач теории тригонометрических сумм. Если через T обозначим количество целочисленных точек области Ω , из-за того, что каждое слагаемое суммы (1) имеет единичный модуль, естественно следует следующая тривиальная оценка

$$|S| \leq T.$$

Данная оценка не учитывает осциллирующий характер экспоненциальных множителей и поэтому во многих случаях оказывается далекой от истинного порядка величины суммы. Основная цель метода тригонометрических сумм состоит в получении нетривиальных оценок, существенно улучшающих указанную границу и отражающих взаимную компенсацию отдельных слагаемых.

Однако для широкого класса функций $F(x_1, x_2, \dots, x_r)$ и областей Ω удаётся получить существенно более точные оценки модуля тригонометрической суммы, чем тривиальная оценка. В частности, во многих случаях имеет место неравенство

$$|S| \leq T\Delta,$$

где Δ представляет собой величину, стремящуюся к нулю при неограниченном возрастании числа T целочисленных точек области Ω , а также при соответствующем изменении параметров функции $F(x_1, x_2, \dots, x_r)$. Поскольку множитель Δ обеспечивает уменьшение верхней границы по сравнению с тривиальной оценкой, его принято называть снижающим множителем.

Получение оценок с малыми значениями Δ является одной из основных задач теории тригонометрических сумм, поскольку такие оценки позволяют выявлять эффект взаимной компенсации слагаемых и служат важным инструментом при исследовании различных проблем аналитической теории чисел.

История применения тригонометрических сумм в теории чисел восходит к работам немецкого математика Карла Фридриха Гаусса. Он при доказательстве закона взаимности квадратичных вычетов впервые применил тригонометрические суммы и тщательно исследовал их основные свойства. Суммы, которые он рассматривал, впоследствии получили название «сумм Гаусса».

Суммы, которые исследовал Гаусс, имеют вид

$$S = \sum_{x=1}^q e^{2\pi i \frac{ax^2}{q}}, \quad (a, q) = 1.$$

Гауссу удалось найти точное значение модуля этих сумм, что является одним из первых весомых результатов в теории тригонометрических сумм и оказал значительное влияние на последующее развитие аналитической теории чисел.

Дальнейшие исследования были посвящены анализу полных рациональных тригонометрических сумм следующего вида:

$$S = \sum_{x=1}^q e\left(\frac{f(x)}{q}\right), \quad (2)$$

где $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x$, $n > 1$, и $(a_n, \dots, a_1, q) = 1$. Суммы Гаусса представляют собой частный случай более общего класса тригонометрических сумм вида (2), где $f(x)$ является многочленом с целыми коэффициентами. Исследование таких сумм стало важным направлением аналитической теории чисел, поскольку они тесно связаны с проблемами распределения арифметических последовательностей и сравнений. Существенный вклад в развитие данной теории внес Луис Морделл. В случае, когда модуль $q = p$ является простым числом, он получил для указанных сумм нетривиальную оценку

$$|S| < n p^{1-\frac{1}{n}}.$$

где n обозначает степень многочлена $f(x)$. Данный результат стал одним из первых общих достижений в теории тригонометрических сумм по многочленам и продемонстрировал возможность получения оценок, существенно улучшающих тривиальную границу порядка p .

Позднее Андре Вейль, следуя идеям Хельмут Хассе, улучшил эту оценку и получил наилучшую, и в общем случае не улучшаемую оценку:

$$|S| < n\sqrt{p}.$$

Полученная Германом Вейлем оценка является, по существу, неулучшаемой по порядку роста при фиксированной степени многочлена n и неограниченном возрастании простого числа p . Действительно, существует бесконечно много случаев, в которых модуль соответствующей тригонометрической суммы имеет порядок не ниже $\sqrt{p}$. Поэтому показатель степени числа p в оценке Вейля не может быть существенно уменьшен.

В дальнейшем внимание исследователей было обращено на случай составного модуля q . Первые существенные результаты в этом направлении были получены Хуа Ло-гэном. Им была доказана оценка

$$|S| \leq c(n) q^{1-\frac{1}{n}},$$

где $c(n)$ – постоянная, зависящая только от степени многочлена n . Данная оценка представляет особый интерес, поскольку при фиксированном n и неограниченном возрастании q её правая часть имеет оптимальный порядок роста. Иными словами, показатель степени числа q в этой оценке в общем случае не может быть существенно улучшен. Результат Хуа Ло-гэна стал важным этапом в развитии теории тригонометрических сумм и оказал значительное влияние на дальнейшие исследования в аналитической теории чисел.

Дальнейшее развитие теории тригонометрических сумм связано с работами Владимира Николаевича Чубарикова [1]. Он для модуля кратных рациональных тригонометрических сумм, которые являются частным случаем сумм следующего вида

$$S = S(\alpha_n, \dots, \alpha_1) = \sum_{m \leq p} e^{2\pi i f(m)}, \quad (3)$$

где $f(m) = \alpha_n m^n + \dots + \alpha_1 m$, коэффициенты $\alpha_n, \dots, \alpha_1$ – произвольные действительные числа, получил нетривиальные оценки.

Герман Вейль впервые разработал метод получения нетривиальных оценок тригонометрических сумм вида (3). В связи с этим такие тригонометрические суммы получили название суммы Вейля. Применение этого метода способствовало впервые получить нетривиальные оценки для более широкого класса тригонометрических сумм. В частности, как показано в работе [2], «... на его основе был установлен закон распределения дробных частей многочлена $f(t)$. Одним из важнейших следствий этого результата является утверждение о равномерном распределении последовательности дробных частей значений многочлена значений многочлена по модулю единицы».

Тем самым метод тригонометрических сумм стал эффективным средством исследования распределительных свойств арифметических последовательностей и заложил основу для дальнейших работ в области аналитической теории чисел и теории равномерного распределения.

Несмотря на фундаментальное значение метода Вейля, полученная им оценка обладает существенным недостатком: с увеличением степени многочлена n её точность заметно ухудшается. Поэтому для многочленов высокой степени данная оценка оказывается недостаточно эффективной. Тем не менее, результаты Вейля сыграли исключительно важную роль в становлении современной аналитической теории чисел. Именно они положили начало систематическому изучению тригонометрических сумм и открыли новые возможности для решения ряда сложных арифметических задач. Исследование задачи о распределении дробных частей значений многочлена $f(t) = \alpha_n t^n + \dots + \alpha_1 t$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ – действительные коэффициенты, стало возможным посредством метода Вейля.

Изучением и исследованием данной тематики на протяжении многих лет занимается таджикская научная школа теории чисел, которая сформировалась на базе Института математики имени академика А. Джураева Национальной Академии наук Таджикистана под руководством академика НАНТ Зарулло Хусеновича Рахмонова. Он и его ученики получили важнейшие результаты, касающиеся оценок тригонометрических сумм, распределения дробных частей значений различных многочленов. Эти результаты они сумели применить к различным задачам аналитической теории чисел.

Результаты (Results)

Задача о *распределении дробных частей значений многочлена, аргумент которого принимает значения из коротких интервалов*, стала одним из важных направлений исследований данной школы. Отметим, что задача распределения дробных частей значений многочлена $f(t)$ относится к тем общим задачам теории чисел, что потребовало создание и развитие метода тригонометрических сумм. Исследование этой проблемы плотно связано с понятием равномерного распределения последовательностей по модулю 1.

Г. Вейль впервые вёл в математику понятие равномерного распределения последовательностей на отрезке. Им же был сформулирован и доказан знаменитый критерий равномерного распределения, который впоследствии стал одним из фундаментальных инструментов теории равномерного распределения последовательностей. Критерий Вейля устанавливает связь между равномерностью распределения последовательности и поведением соответствующих тригонометрических сумм, что определяет важнейшую роль последних в исследовании распределительных свойств числовых последовательностей.

Таким образом, теория тригонометрических сумм и теория равномерного распределения развивались в тесной взаимосвязи, взаимно обогащая друг друга и формируя мощный аппарат для решения широкого круга задач аналитической теории чисел.

Английский математик Роберт Вон исследовал суммы Вейля следующего вида:

$$T(\alpha, x) = \sum_{m \leq x} e(\alpha m^n), \quad \alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad q \leq \tau, \quad (a, q) = 1, \quad |\lambda| \leq \frac{1}{q\tau},$$

и, используя метод Ван дер Корпута, доказал следующую оценку:

$$T(\alpha, x) = \frac{S(a, q)}{q} \int_0^x e(\lambda t^n) dt + O\left(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon} (1 + x^n |\lambda|)^{\frac{1}{2}}\right),$$

где

$$S(a, q) = S_0(a, q) = \sum_{k=1}^q e\left(\frac{ak^n}{q}\right).$$

При достаточно точном приближении числа α рациональной дробью со знаменателем q , то есть при условии

$$|\lambda| \leq \frac{1}{2n q x^{n-1}},$$

им же была получена следующая асимптотическая формула:

$$T(\alpha, x) = x \frac{S(\alpha, q)}{q} \int_0^1 e(\lambda t^n) dt + O\left(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right).$$

Соответственно в работах [3 – 6], для случаев $n = 2, 3, 4, 5$, были исследованы короткие тригонометрические суммы Вейля следующего вида

$$T(\alpha, x, y) = \sum_{x-y < m \leq x} e(\alpha m^n), \quad (4)$$

где $\alpha = \frac{a}{q} + \lambda$, $(a, q) = 1$, $q \leq \tau$, $|\lambda| \leq \frac{1}{q\tau}$.

В 2011–2012 годах академик Зарулло Хусенович Рахмонов совместно со своей ученицей Н.Б. Озодбековой в работах [7], [2], [8] исследовали короткие тригонометрические суммы Вейля вида (4) и получили ряд новых оценок для этих сумм.

Основные результаты, полученные Н.Б. Озодбековой, состоят в следующем:

Если величина $n\lambda x^{n-1}$ близка к целому числу, тогда

а) получены новые оценки коротких тригонометрических сумм вида (4);

б) установлена зависимость оценки суммы (4) от величины $\lambda = \alpha - \frac{a}{q}$, которая характеризует расстояние между числом α и рациональным приближением $\frac{a}{q}$.

В частности, она доказала следующую теорему, в которой для сумм Вейля, то есть сумм вида (4), при взятии переменной суммирования из короткого интервала и условия

$$\tau \geq 2n(n-1)x^{n-2}y,$$

получены следующие оценки:

- если

$$n\lambda x^{n-1} \leq \frac{1}{2q},$$

то

$$T(\alpha, x, y) = \frac{S(\alpha, q)}{q} T(\lambda; x, y) + O\left(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right);$$

- если

$$n\lambda x^{n-1} > \frac{1}{2q},$$

то

$$T(\alpha, x, y) \ll q^{1-\frac{1}{n}} \ln q + \min_{2 \leq k \leq n} \left(y q^{-\frac{1}{n}}, x^{1-\frac{1}{k}} q^{\frac{1}{k}-\frac{1}{n}} \right).$$

Последнее соотношение выражает прямую зависимость оценки $T(\alpha, x, y)$ от величины λ .

Эти оценки были доказаны с использованием метода оценок тригонометрических сумм Ван дер Корпута в сочетании с современными оценками рациональных тригонометрических сумм Хуа Ло-кэна и представляют собой обобщение результатов Роберта Вона о поведении тригонометрических сумм Вейля в случае коротких сумм.

Полученные оценки были использованы для доказательства следующего результата [2]: «Пусть α – иррациональное число, и $0 \leq \sigma \leq 1$, а через $F_\alpha(x, y, \sigma)$ обозначено количество членов последовательности $\{\alpha m^2\}$, удовлетворяющих условиям $x - y < m \leq x$, $\{\alpha m^2\} < \sigma$. Тогда имеет место асимптотическая формула

$$F_\alpha(x, y, \sigma) = \sigma y + O\left(y^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \ln^2 x\right).$$

Отсюда следует, что для величины $D(x, y)$, т.е. для отклонения распределения членов последовательности $\{\alpha m^2\}$ на промежутке $x - y < m \leq x$ выполняется неравенство

$$D(x, y) \ll y^{-\frac{1}{2}+\varepsilon} \ln^2 x.$$

Из последней оценки получен следующий критерий равномерной распределенности по модулю 1 для последовательности $\{\alpha m^2\}$, где $x - y < m \leq x$: пусть α – иррациональное число, тогда

последовательности $\{\alpha m^2\}$, таких что $x - y < t \leq x$, при $y \geq (\ln x)^5$, $y \rightarrow \infty$ является равномерно распределенной по модулю единицы».

В период 2011 по 2015 годам З.Х. Рахмонов вместе со своим учеником С.Н. Исмаиловым изучил и исследовал задачи о *распределении дробных частей линейного многочлена, аргумент которого принимает простые значения из коротких интервалов*. В 1934 году И.М. Виноградов в работе [9] нашел новый метод, который не только значительно совершенствовал решения задач, ранее рассматриваемые другими подходами, но и предоставил новые возможности для решения многих задач и проблем теории чисел. Основная идея метода Виноградова состоит в нахождении нетривиальных оценок для двойных тригонометрических сумм следующего вида

$$W = \sum_{m \leq X} \sum_{n \leq Y} a(m) b(n) e(\alpha m n),$$

где $a(m), b(n)$ – произвольные комплекснозначные функции, а параметр α представим в форме

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a, q) = 1, \quad |\theta| \leq 1.$$

Представление числа α в указанном виде позволяет эффективно использовать арифметические свойства рационального приближения $\frac{a}{q}$ и получать оценки сумм, существенно превосходящие тривиальные. Именно такие оценки лежат в основе метода тригонометрических сумм Виноградова и находят многочисленные применения в аналитической теории чисел, в частности, при исследовании распределения простых чисел и дробных частей значений арифметических функций.

Такая форма числа α позволяет применять методы математического анализа для получения точных верхних оценок величины W , что является ключевым преимуществом этого метода.

Другим важным достижением, полученным с применением нового метода, являются совершенно новые оценки сумм Вейля [10 – 11]. Основа этих новых оценок была представлена так называемой «теоремой о среднем значении» И.М. Виноградова.

В 1935 году И.М. Виноградов получил оценки сумм Вейля, опираясь на теорему о среднем значении тригонометрических сумм вида:

$$S = S(\alpha_n, \dots, \alpha_1) = \sum_{x=1}^P e(f(x)),$$

где $f(x) = \alpha_n x^n + \dots + \alpha_1 x$, а $(\alpha_n, \dots, \alpha_1)$ – произвольные действительные коэффициенты.

Содержание теоремы о среднем значении сводится к получению верхней оценки величины среднего значения модуля тригонометрической суммы S , возведенного в степени $2b$, т.е. величины следующего вида

$$J = J_b = J_b(P) = \int_0^1 \dots \int_0^1 |S(\alpha_n, \dots, \alpha_1)|^{2b} d(\alpha_n, \dots, \alpha_1).$$

В 1937 году И.М. Виноградов показал, что многие тригонометрические суммы по простым числам могут быть представлены через линейные комбинации сравнительно небольшого числа других сумм, для которых удаётся получить более точные оценки с помощью метода двойных сумм W и ряда вспомогательных аналитических средств, не связанных непосредственно с теорией дзета-функции Римана и L – рядами Дирихле. Одной из таких сумм является

$$S' = \sum_{p \leq P} e(f(p)),$$

где $f(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha x$. Данная сумма представляет собой аналог классической суммы Вейля S , однако суммирование в ней производится только по простым числам, не превосходящим P .

Первоначально И.М. Виноградовым была получена нетривиальная оценка для суммы

$$\sum_{p \leq P} e(\alpha p),$$

которая соответствует частному случаю суммы S' при $n = 1$ и $f(x) = \alpha x$. Сочетание этой оценки с результатами о распределении простых чисел в арифметических прогрессиях позволило впервые вывести асимптотическую формулу для числа $I(N)$ представлений нечётного числа N в виде суммы трёх простых чисел:

$$N = p_1 + p_2 + p_3.$$

В качестве непосредственного следствия было доказано, что всякое достаточно большое нечётное число допускает такое представление. Тем самым был решён тернарный случай знаменитой гипотезы Гольдбаха, являющийся одним из наиболее значительных достижений аналитической теории чисел XX века.

Позднее, в том же 1937 году, И.М. Виноградов, опираясь на изложенные выше идеи и эффективно используя метод Г. Вейля, получил оценки тригонометрической суммы

$$S' = \sum_{p \leq P} e(f(p))$$

для случая $n > 1$. Полученные оценки по своему характеру оказались близкими к оценкам соответствующей суммы S , установленным ранее методом Вейля.

В дальнейшем, в период 1948–1956 годов, Виноградов существенно развил этот подход. Используя те же основные идеи, но заменив метод Вейля собственным методом тригонометрических сумм, он доказал общую теорему об оценках суммы S' по простым числам, которая по своей силе и содержанию является аналогом общей теоремы Виноградова для суммы S .

В основе метода Виноградова для исследования тригонометрических сумм по простым числам лежат несколько ключевых инструментов: метод разложения двойных сумм, теорема о среднем значении, а также разработанное им решето Виноградова. Совокупность этих методов позволила получить глубокие результаты в задачах аналитической теории чисел, связанных с распределением простых чисел и дробных частей значений многочленов.

Оценки суммы S' находят непосредственное применение при изучении распределения дробных частей значений многочлена $f(p)$, где p пробегает последовательность простых чисел, не превосходящих заданного числа P .

Особое внимание Виноградов уделил задаче о распределении дробных частей последовательности $\{\alpha p\}$. В этом случае ему удалось получить существенно более точные оценки тригонометрических сумм, чем в общей задаче о распределении дробных частей значений многочлена $\alpha_n p^n + \dots + \alpha_1 p$.

В частности, была доказана следующая теорема. Пусть K – целое число, удовлетворяющее условию $K \leq N$, а действительное число α представлено в виде

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a, q) = 1, \quad 1 \leq q \leq N,$$

где $|\theta| \leq 1$. Тогда для величины

$$V_K(N) = \sum_{k=1}^K \left| \sum_{p \leq N} e(\alpha k p) \right|$$

справедлива оценка

$$V_K(N) \ll K N^{1+\varepsilon} \left(\sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{N}} + N^{-0,2} \right). \quad (5)$$

Отсюда следует: для любого σ , $0 < \sigma \leq 1$, пусть $F_\alpha(N, \sigma)$ – количество членов $\{\alpha p\}$, $p \leq N$, удовлетворяющих условию $\{\alpha p\} < \sigma$. Тогда

$$F_\alpha(N, \sigma) = \sigma \pi(N) + R_\sigma(N), \quad R_\sigma(N) \ll \sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{N}} + N^{-0,2}.$$

Основу доказательства оценки (5) составляют решето Виноградова и нетривиальные оценки тригонометрических сумм специального вида:

$$W(x) = \sum_{k \leq K} \left| \sum_{F_1 < m \leq F_2} a(m) \sum_{\substack{G_1 < n \leq G_2 \\ mn \leq x}} b(n) e(\alpha kmn) \right|,$$

где $\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}$, $(a, q) = 1$, а функции $a(m)$ и $b(n)$ принимают комплексные значения. Параметры K , F и G являются натуральными числами, причём $F \leq F_1 < F_2 \leq 2F$, $G \leq G_1 < G_2 \leq 2G$.

Исследуя распределение дробных частей последовательности $\{\alpha p\}$ и связанные с ним оценки тригонометрических сумм $V_K(N)$, И.М. Виноградов, как и при решении ряда других задач аналитической теории чисел, широко использовал разработанный им метод, основанный на знаменитой лемме «о стаканчиках». Этот метод оказался весьма эффективным инструментом для получения нетривиальных оценок тригонометрических сумм и исследования закономерностей распределения арифметических последовательностей.

В ходе дальнейших исследований С.Н. Исмамов получил нетривиальные оценки для суммы модулей кратких двойных тригонометрических сумм вида

$$W(x, y) = \sum_{k \leq K} \left| \sum_{F_1 < m \leq F_2} a(m) \sum_{\substack{G_1 < n \leq G_2 \\ x-y < mn \leq x}} b(n) e(\alpha kmn) \right|,$$

которая возникает из суммы $W(x)$ при замене условия $mn \leq x$ на более узкое условие $x - y < mn \leq x$, где $\sqrt{x} < y \leq x \mathcal{L}^{-1}$ и $\mathcal{L} = \ln xq$.

Исследуемая сумма $W(x, y)$ включает как «длинную» полную сумму, так и совокупность двойных сумм, которые по своему порядку близки к полной сумме и требуют применения специальных методов оценивания.

Полученные оценки были использованы для изучения сумм модулей кратких тригонометрических сумм по простым числам $V_K(N, H)$, которые выводятся из сумм $V_K(N)$ заменой условия $p \leq N$ на условие $N - H < p \leq N$.

Применяя метод оценок тригонометрических сумм по простым числам, разработанный И.М. Виноградовым, С.Н. Исмамов получил ряд новых нетривиальных оценок для величины $V_K(N, H)$. Эти результаты позволили существенно продвинуться в исследовании распределения дробных частей значений линейных многочленов на последовательностях простых чисел, принадлежащих коротким интервалам, и послужили основой для доказательства новых теорем о равномерном распределении соответствующих последовательностей.

Теорема 1. [12]. Пусть K, H, N и q – натуральные числа, $K \leq H$, A – положительная постоянная, $\mathcal{L} = \ln Nq$, α – действительное число, и

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a, q) = 1, \quad \mathcal{L}^{AA+20} \leq q \leq \frac{KH^2}{N} \mathcal{L}^{-4A-20}.$$

Тогда при $H \gg N^{\frac{2}{3}} \mathcal{L}^{AA+16}$ выполняется оценка:

$$V_K(N, H) = \sum_{k=1}^K \left| \sum_{N-H < p \leq N} e(\alpha kp) \right| \ll \frac{KH}{\mathcal{L}^{A+1}}.$$

В работе [13] предложен критерий Г. Вейля, касающийся равномерного распределения дробных частей $\{\alpha p\}$, аргумент которых пробегает простые числа из коротких интервалов.

С.Н. Исмамов получил теорему, устанавливающую связь между распределением дробных частей $\{\alpha p\}$, где p – простые числа из короткого интервала $(x - y, x]$, и оценками кратких тригонометрических сумм, содержащих простые числа $V_K(x, y)$.

Теорема 2. [14]. Пусть $y \geq x^{0,534}$, $\mathcal{L} = \ln x$, $A > 1$ – положительная постоянная, $M \geq \mathcal{L}^A$, и $M_1 = M \ln \mathcal{L}^A$. Тогда для $F_\alpha(x, y, \sigma)$ – количества членов последовательности $\{\alpha p\}$, где $x - y < p \leq x$ и $\{\alpha p\} < \sigma$, выполняется асимптотическая формула:

$$F_\alpha(x, y, \sigma) - \sigma(\pi(x) - \pi(x - y)) \ll \frac{y \ln M}{\mathcal{L}^{A+1}} + \max_{K \leq M_1} \left(\frac{V_K(x, y)}{K} \mathcal{L} \right),$$

где $\pi(x)$ обозначает функцию распределения простых чисел, то есть число простых чисел, не превосходящих x .

Из теорем 1 и 2, а также из закона распределения простых чисел в коротких интервалах для функции $F_\alpha(x, y, \sigma)$ выводится следующая асимптотическая формула:

$$F_\alpha(x, y, \sigma) = \frac{\sigma y}{\mathcal{L}} + O\left(\frac{y}{\mathcal{L}^2}\right),$$

справедливая при условии $y \gg x^{\frac{2}{3}} \mathcal{L}^{4A+16}$. Отсюда следует, что последовательность $\{\alpha p\}$, где простое число p удовлетворяет неравенству $x - y < p \leq x$, при $y \gg x^{\frac{2}{3}} (\ln x)^{4A+16}$ и $y \rightarrow \infty$ является равномерно распределённой по модулю 1.

Теорема 1, устанавливающая нетривиальную оценку кратких линейных тригонометрических сумм с простыми числами $V_K(N, H)$ при $H \gg N^{\frac{2}{3}}$, в сочетании с теоремой 2 послужила основой для доказательства следующего результата о распределении дробных частей $\{\alpha p\}$, где p пробегает простые числа из короткого интервала $(x - y, x]$. Полученная теорема распространяет закон распределения на ещё более короткие интервалы и охватывает как все иррациональные значения α , так и рациональные значения α с достаточно большими знаменателями [15].

Теорема 3. Пусть x , y и q — натуральные числа, $A \geq 3$ — фиксированная положительная постоянная, $\mathcal{L} = \ln xq$, α — действительное число, представимое в виде

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a, q) = 1,$$

причём

$$\mathcal{L}^{4A+20} \leq q \leq \frac{y^2}{x} \mathcal{L}^{-4A-20}.$$

Тогда для функции $F_\alpha(x, y, \sigma)$, обозначающей число членов последовательности $\{\alpha p\}$, удовлетворяющих условиям $x - y < p \leq x$ и $\{\alpha p\} < \sigma$, при $y \gg x^{\frac{2}{3}} \mathcal{L}^{4A+16}$ имеет место асимптотическая формула

$$F_\alpha(x, y, \sigma) = \sigma(\pi(x) - \pi(x - y)) + O\left(\frac{y}{\mathcal{L}^A}\right).$$

Данный результат существенно расширяет область применения закона равномерного распределения дробных частей $\{\alpha p\}$ для простых чисел из коротких интервалов, распространяя его не только на все иррациональные значения параметра α , но и на широкий класс рациональных чисел с достаточно большими знаменателями.

Полученные С.Н. Исмамовым результаты основаны на строгом математическом аппарате современной аналитической теории чисел. При их доказательстве были эффективно использованы:

- метод И.М. Виноградова для получения нетривиальных оценок тригонометрических сумм с простыми числами;
- метод Г. Вейля для исследования распределения дробных частей и оценки тригонометрических сумм;
- методы гармонического анализа, позволяющие устанавливать тонкие свойства распределения арифметических последовательностей.

Распределение дробных частей значений квадратичного многочлена, аргумент которого принимает простые значения из коротких интервалов. В работе [16] Фируз Заруллоевич Рахмонов

исследует более сложную задачу, связанную с распределением дробных частей значений квадратичного многочлена $\{ap^2\}$, где p пробегает простые числа, принадлежащие короткому интервалу.

Основной результат Ф.З. Рахмонова заключается в получении асимптотической формулы для количества членов последовательности $\{ap^2\}$, удовлетворяющих заданным условиям, при существенно более слабых ограничениях на длину интервала, чем это было известно ранее. В частности, для функции $F_\alpha(x, y, \sigma)$, обозначающей число простых чисел p , для которых выполняются неравенства $x - y < p \leq x$ и $\{ap^2\} < \sigma$, удалось установить асимптотическое поведение уже в случае, когда длина интервала имеет лишь логарифмический порядок: $y \gg (\ln x)^{8A+4}$, где A – абсолютная положительная постоянная. Предполагая, что число α представимо в виде $\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}$, $(a, q) = 1$, и знаменатель рационального приближения удовлетворяет условиям

$$(\ln x)^{8A+3} \ll q \ll Ky^2 (\ln x)^{-8A-4},$$

автор доказал асимптотическую формулу

$$F_\alpha(x, y, \sigma) = \sigma(\pi(x) - \pi(x - y)) + O\left(\frac{y}{(\ln x)^A}\right).$$

Этот результат означает, что если p принимает простые числа из короткого интервала $(x - y, x]$, то $\{ap^2\}$ – последовательность дробных частей равномерно распределено по модулю единицы.

Обсуждение (Discussions)

История исследования распределения дробных частей значений многочленов на множестве простых чисел отражает последовательное развитие идей и методов аналитической теории чисел. Это проблема берет свое начало в работах И.М. Виноградова, основавший основы применения метода тригонометрических сумм к исследованию простых чисел. Результаты, полученные представителями таджикской школы теории чисел З.Х. Рахмоновым, Н.Б. Озодбековой, С.Н. Исмамовым и Ф.З. Рахмоновым существенно расширили область применения существующих методов аналитической теории чисел, позволив установить новые закономерности распределения дробных частей значений многочленов, аргументы которых принимают простые числа из коротких интервалов.

Заключение (Conclusions)

В статье рассмотрены основные этапы развития теории тригонометрических сумм и их роль в решении задач аналитической теории чисел. Показано, что тригонометрические суммы, начиная с исследований К.Ф. Гаусса, стали одним из важнейших инструментов современной теории чисел. Особое внимание уделено методам и результатам Л. Морделла, А. Вейля, Хуа Ло-кэна, В.Н. Чубарикова, и прежде всего, И.М. Виноградова, внесших существенных вклад в получение нетривиальных оценок тригонометрических сумм.

В статье также рассмотрены результаты исследований современных таджикских ученых – З.Х. Рахмонова, Н.Б. Озодбековой, С.Н. Исмамова и Ф.З. Рахмонова, посвященных коротким тригонометрическим суммам с простыми числами. Полученные ими нетривиальные оценки позволили свести задачи о равномерном распределении дробных частей линейных многочленов, аргументы которых являются простые числа из коротких интервалов, к задачам оценки абсолютных значений коротких тригонометрических сумм. На этой основе установлены условия равномерного распределения и получены соответствующие асимптотические формулы для более коротких интервалов.

Проведенный анализ показывает, что таджикские исследователи вносят вклад в развитие мировой науки и в ряде случаев получают результаты, превосходящие известные достижения.

Рецензент: Хайруллохзода Ш.А. – д.ф.-м.н., профессор кафедры алгебры и теории чисел ТДТУ

Литература

1. Чубариков, В.Н. О кратных рациональных тригонометрических суммах и кратных интегралах / В.Н. Чубариков // Математические заметки. – 1976. – Т. 20. – Вып. 1. – С. 61-68.
2. Озодбекова, Н.Б. Распределение дробных частей квадратичного многочлена, аргумент которого принимает значения из коротких интервалов / Н.Б. Озодбекова // Доклады АН РТ. – 2012. – Т. 55. – № 1. – С. 3-10.
3. Рахмонов, З.Х. Короткие квадратичные тригонометрические суммы Вейля / З.Х. Рахмонов, Дж.А. Шокамолова // Известия АН РТ, отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. наук. – 2009. – Т. 135. – № 2(135). – С. 7-18.

4. Рахмонов, З.Х. Оценка коротких тригонометрических сумм Г. Вейля четвертой степени / З.Х. Рахмонов, К.И. Мирзоабдугафуров, А.З. Азамов // ДАН РТ. – 2010. – Т. 53. – № 10. – С. 737-744.
5. Рахмонов, З.Х. Короткая кубическая тригонометрическая сумма Г.Вейля / З.Х. Рахмонов, Д.М. Фозилова // Доклады АН РТ. – 2011. – Т. 54. – № 11. – С. 880-886.
6. Рахмонов, З.Х. Проблема Варинга для пятых степеней с почти равными слагаемыми / З.Х. Рахмонов, Н.Н. Назрублов // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. – 2014. – Т. 57. – № 11-12. – С. 823-830.
7. Рахмонов, З.Х. Оценка коротких тригонометрических сумм Г.Вейля / З.Х. Рахмонов, Н.Б. Озодбекова // Доклады АН РТ. – 2011. – Т. 54. – №4. – С. 257-264.
8. Рахмонов, З.Х. Короткие тригонометрические суммы Г.Вейля / З.Х. Рахмонов, Н.Б. Озодбекова // Материалы международной конференции «Комплексный анализ и его приложения в дифференциальных уравнениях и теории чисел», Белгород, 17-21 октября 2011 г. – С. 90-93.
9. Виноградов, И.М. Избранные труды / И.М. Виноградов. – М.: Издательство АН СССР. – 1952. – 436 с.
10. Виноградов, И.М. Новый метод в аналитической теории чисел / И.М. Виноградов // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. – 1937. – Т. 10. – С. 5-122.
11. Виноградов, И.М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел / И.М. Виноградов, А.А. Карацуба // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. – 1984. – Т. 168. – С. 4-30.
12. Рахмонов, З.Х. Оценка сумм коротких тригонометрических сумм с простыми числами / З.Х. Рахмонов, Ф.З. Рахмонов, С.Н. Исмаев // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. – 2013. – Т. 56. – № 12. – С. 937-945.
13. Исмаев, С.Н. Распределение дробных частей линейного многочлена, аргумент которого принимает простые числа из коротких интервалов. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук / С.Н. Исмаев. – Душанбе. – 2015. – 70 с.
14. Исмаев, С.Н. О распределении дробных частей $\{\alpha p\}$, аргумент которого пробегает простые числа из короткого интервала / С.Н. Исмаев // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. – 2014. – Т. 57. – № 1. – С. 9-14.
15. Исмаев, С.Н. Распределение дробных частей $\{\alpha p\}$, аргумент которого пробегает простые числа из короткого интервала / С.Н. Исмаев // Вестник Таджикского Национального Университета, серия естественных наук. – 2015. – № 1/2. – С. 25-28.
16. Рахмонов, Ф.З. Распределение дробных частей значений квадратичного многочлена, аргумент которого принимает значения простых чисел из коротких интервалов / Ф.З. Рахмонов // Вестник Филиала Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова в городе Душанбе. – 2025. – Т. 1. – № 1(45). – С. 43-49.

Reference

1. Chubarikov, V.N. On multiple rational trigonometric sums and multiple integrals / V.N. Chubarikov // Mathematical notes. – 1976. – Vol. 20. – No. 1. – P. 61-68.
2. Ozodbekova, N.B. Distribution of fractional parts of a quadratic polynomial whose argument takes values from short intervals / N.B. Ozodbekova // Reports of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan. – 2012. – Vol. 55. – No. 1. – P. 3-10.
3. Rakhmonov, Z.Kh. Short quadratic Weyl trigonometric sums / Z.Kh. Rakhmonov, Dzh.A. Shokamolova // Proceedings of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan, Department of Physical, Mathematical, Chemical, Geological and Technical Sciences. – 2009. – Vol. 135. – No. 2(135). – P. 7-18.
4. Rakhmonov, Z.Kh. Estimate of short fourth-degree Weyl trigonometric sums / Z.Kh. Rakhmonov, K.I. Mirzoabdugafurov, A.Z. Azamov // Reports of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan. – 2010. – Vol. 53. – No. 10. – P. 737-744.
5. Rakhmonov, Z.Kh. Short cubic Weyl trigonometric sum / Z.Kh. Rakhmonov, D.M. Fozilova // Reports of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan. – 2011. – Vol. 54. – No. 11. – P. 880-886.
6. Rakhmonov, Z.Kh. Waring's problem for fifth powers with nearly equal summands / Z.Kh. Rakhmonov, N.N. Nazrublov // Reports of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan. – 2014. – Vol. 57. – No. 11-12. – P. 823-830.
7. Rakhmonov, Z.Kh. Estimate of short Weyl trigonometric sums / Z.Kh. Rakhmonov, N.B. Ozodbekova // Reports of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan. – 2011. – Vol. 54. – No. 4. – P. 257-264.
8. Rakhmonov, Z.Kh. Short Weyl trigonometric sums / Z.Kh. Rakhmonov, N.B. Ozodbekova // Proceedings of the International Conference “Complex Analysis and Its Applications in Differential Equations and Number Theory”, Belgorod, October 17–21, 2011. – P. 90-93.
9. Vinogradov, I.M. Selected works / I.M. Vinogradov. – Moscow: Publishing House of the Academy of Sciences of the USSR. – 1952. – 436 p.
10. Vinogradov, I.M. A new method in analytic number theory / I.M. Vinogradov // Proceedings of the Steklov Mathematical Institute. – 1937. – Vol. 10. – P. 5-122.
11. Vinogradov, I.M. The method of trigonometric sums in number theory / I.M. Vinogradov, A.A. Karatsuba // Proceedings of the Steklov Mathematical Institute. – 1984. – Vol. 168. – P. 4-30.
12. Rakhmonov, Z.Kh. Estimate of sums of short trigonometric sums over primes / Z.Kh. Rakhmonov, F.Z. Rakhmonov, S.N. Ismatov // Reports of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan. – 2013. – Vol. 56. – No. 12. – P. 937-945.
13. Ismatov, S.N. Distribution of fractional parts of a linear polynomial whose argument takes prime values from short intervals: Dissertation for the degree of candidate of physical and mathematical sciences / S.N. Ismatov. – Dushanbe. – 2015. – 70 p.

14. Ismatov, S.N. On the distribution of fractional parts of $\{\alpha p\}$, whose argument runs through prime numbers from a short interval / S.N. Ismatov // Reports of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan. – 2014. – Vol. 57. – No. 1. – P. 9-14.
15. Ismatov, S.N. Distribution of fractional parts of $\{\alpha p\}$, whose argument runs through prime numbers from a short interval / S.N. Ismatov // Bulletin of the Tajik National University, Natural Sciences Series. – 2015. – No. 1/2. – P. 25-28.
16. Rakhmonov, F.Z. Distribution of fractional parts of values of a quadratic polynomial whose argument takes prime values from short intervals / F.Z. Rakhmonov // Bulletin of the Dushanbe Branch of Lomonosov Moscow State University. – 2025. – Vol. 1. – No. 1(45). – P. 43-49.

Сведения об авторах:

Неъматзода Сайфулло Неъмат, кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник Института математики имени академика А. Джураева НАН Таджикистана. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3816-0731>. E-mail: saifullo@mail.ru

Назруллоев Насрулло Нуруллоевич, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий отделом алгебры, теории чисел и топологии Института математики имени академика А. Джураева НАН Таджикистана. Email: nasrullo_86@bk.ru

Маълумот оид ба муаллифон:

Неъматзода Сайфулло Неъмат, номзади илмҳои физикаю математика, дотсент, ходими калони илмӣ Институту математикаи ба номи академик А. Ҷӯраевӣ Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3816-0731>. E-mail: saifullo@mail.ru

Назруллоев Насрулло Нуруллоевич, номзади илмҳои физикаю математика, дотсент, мудири шуъбаи алгебра, назарияи ададҳо ва топологияи Институту математикаи ба номи академик А. Ҷӯраевӣ Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон. Email: nasrullo_86@bk.ru

Information about the authors:

Nematzoda Saifullo Nemat, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior researcher Institute of mathematics named after Academician A. Juraev of the National Academy of sciences of Tajikistan. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3816-0731>. E-mail: saifullo@mail.ru

Nazrubloev Nasrullo Nurubloevich, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Head of the department of algebra, number theory and topology Institute of mathematics named after Academician A. Juraev of the National Academy of sciences of Tajikistan. E-mail: nasrullo_86@bk.ru